b) Red konvergira. Uputstvo. $0<\frac{1}{(2n-1)2^{2n-1}}\leq\frac{1}{2^{2n-1}}$, $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^{2n-1}}=\frac{2}{3}$ (geometrijski red).

Primjer 7. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$.

$\frac{n+1}{n(n+2)}=\frac{n+1}{n}\cdot\frac{1}{n+2}>\frac{1}{n+2}$. Kako red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n+2}$ divergira, to i red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n+1}{n(n+2)}$ divergira.

2. Granični kriterijum upoređivanja

Ako za članove reda (A) i apsolutno konvergentnog reda (B) važi da je $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right|=q,\ 0<q<+\infty$, tada i red (A) apsolutno konvergira.

Dokaz. Iz $\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_n}{b_n}\right|=q,\ 0<q<+\infty$ slijedi $\forall\varepsilon>0\exists n_0\forall n>n_0:\left|\left|\frac{a_n}{b_n}\right|-q\right|<\varepsilon$, tj. $\forall n>n_0:|a_n|<(\varepsilon+q)|b_n|$. Kako je red (B) apsolutno konvergira, to $\forall\varepsilon>0\exists n_1\forall n>n_1\forall p\in N:|b_{n+1}|+|b_{n+2}|+\ldots|b_{n+p}|+<\varepsilon$. Dalje, za svako $n>\max(n_0,n_1)$ imamo da je $|a_{n+1}+a_{n+2}+\ldots+a_{n+p}|\leq|a_{n+1}|+|a_{n+2}|+\ldots+|a_{n+p}|<(\varepsilon+q)\left(|b_{n+1}|+|b_{n+2}|+\ldots|b_{n+p}|\right)<\varepsilon(\varepsilon+q)=\varepsilon_1$, tj. niz $\left(S_n^{(1)}\right)$, gdje je $S_n^{(1)}=\sum_{k=1}^{n}a_k$, apsolutno konvergira (tj. konvergira).

Posljedica 2. Ako je u prethodnom kriterijumu: $(\forall n\in N):a_n>0\ \wedge\ b_n>0$, tada redovi (A) i (B) istovremeno ili konvergiraju, ili divergiraju.

Primjer 8. Ispitati konvergenciju reda $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$.

Neka je $a_n=\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ i $b_n=\frac{1}{n}$. Tada je $(\forall n\in N):a_n>0,\ b_n>0$ i $\lim_{n\to+\infty}\frac{a_n}{b_n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{\sqrt{1+n^2}}=1\ (>0)$. Kako red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n}$ divergira, to i red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{1+n^2}}$ divergira.

3. Dalamberov kriterijum

Neka je $\lim\limits_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = r$. Tada red (A) za:

a) $0 \le r < 1$ - apsolutno konvergira, b) $r > 1$ - divergira.

Dokaz. a) Izaberimo $\varepsilon>0$ tako da je $r+\varepsilon=q<1$. Za ovako izabrano ε postoji $n_0 \in N$ takvo da za svako $n>n_0$ važi: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \le q$, odnosno: $\left|a_{n_0+1}\right| \le q\left|a_{n_0}\right|$, $\left|a_{n_0+2}\right| \le q\left|a_{n_0+1}\right| \le q^2\left|a_{n_0}\right|$,...,

$\left|a_{n_0+k}\right| \le q^k\left|a_{n_0}\right|$... . Kako red $\sum\limits_{k=1}^{+\infty} q^k$ konvergira, to i red $\sum\limits_{k=1}^{+\infty}\left|a_{n_0+k}\right|$ konvergira, tj. red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left|a_n\right|$ konvergira.

b) Neka je $q>1$. Izaberimo $\varepsilon>0$ tako da je $r-\varepsilon=q>1$. Tada postoji $n_0 \in N$ takvo da za svako $n>n_0$ važi: $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \ge q$, odnosno $\left|a_{n_0+k}\right| \ge q^k\left|a_{n_0}\right|$ za $k=1,2,3...$. Kako je $\lim\limits_{k\to+\infty} q^k\left|a_{n_0}\right| = +\infty$, to je i $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|a_{n_0+k}\right| = +\infty$. Ovo znači da red (A) nije konvergentan, jer nije ispunjen neophodan uslov konvergencije reda.

Primjer 9. Ispitati konvergenciju redova:

a) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n}{n+1}$, b) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\cdots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)$, c) $\sum\limits_{n=1}^{+\infty}\frac{n^2}{3^n}$.

a) Ovdje je $a_n = \frac{3^n}{n+1}$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3\frac{n+1}{n+2}$ i $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = 3\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2} = 3 > 1$. Slijedi, red divergira.

b) Ovdje je $a_n = \left(\sqrt{2}-\sqrt[3]{2}\right)\left(\sqrt{2}-\sqrt[5]{2}\right)\cdots\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+1]{2}\right)$, $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2}$ i

$\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim\limits_{n\to+\infty}\left(\sqrt{2}-\sqrt[2n+3]{2}\right) = \sqrt{2}-1 < 1$. Slijedi, red konvergira.

c) Konvergira. Uputstvo: $\lim\limits_{n\to+\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{3}$.

4. Košijev korijenski kriterijum

Neka je $\limsup\limits_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left|a_n\right|} = r$ .Tada red (A) za:

a) $0 \le r < 1$ - apsolutno konvergira, b) $r > 1$ - divergira.

Dokaz. a) Kako je $r<1$, to se može izabrati $\varepsilon>0$ tako da je $r+\varepsilon=q<1$. Za ovako izabrano ε postoji prirodan broj n_0 takav da je $\sqrt[n]{\left|a_n\right|} < q$ za svako $n>n_0$, odnosno $\left|a_n\right| < q^n$ za

$n>n_0$. Kako red $\sum_{k=n_0+1}^{+\infty} q^k$ konvergira, to i red $\sum_{n=n_0+1}^{+\infty} |a_n|$ konvergira, tj red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ apsolutno konvergira.

b) Za $r>1$ postupimo slično kao u slučaju b) Dalamberovog kriterijuma. Izaberimo $\varepsilon>0$ tako da je $r-\varepsilon=q>1$. Tada postoji $n_0 \in N$ takvo da za svako $n>n_0$ važi: $\sqrt[n]{|a_n|} \geq q$, odnosno $|a_n| \geq q^n$ za $n=n_0+1, n_0+2...$. Kako je $\lim_{k\to+\infty} q^k = +\infty$, to je i $\lim_{k\to+\infty} |a_k| = +\infty$. Ovo znači da red (A) nije konvergentan, jer nije ispunjen neophodan uslov konvergencije reda.

Napomena 2. Slučaj $r=1$ Dalamberov kriterijum i Košijev korijenski kriterijum ne rješavaju. Tako, na primjer, red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira, a red $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergira, mada je u oba slučaja $r=1$.

Primjer 10. Ispitati konvergenciju redova: a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{2n+1}\right)^n$, b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{a^n}$, $a>0$.

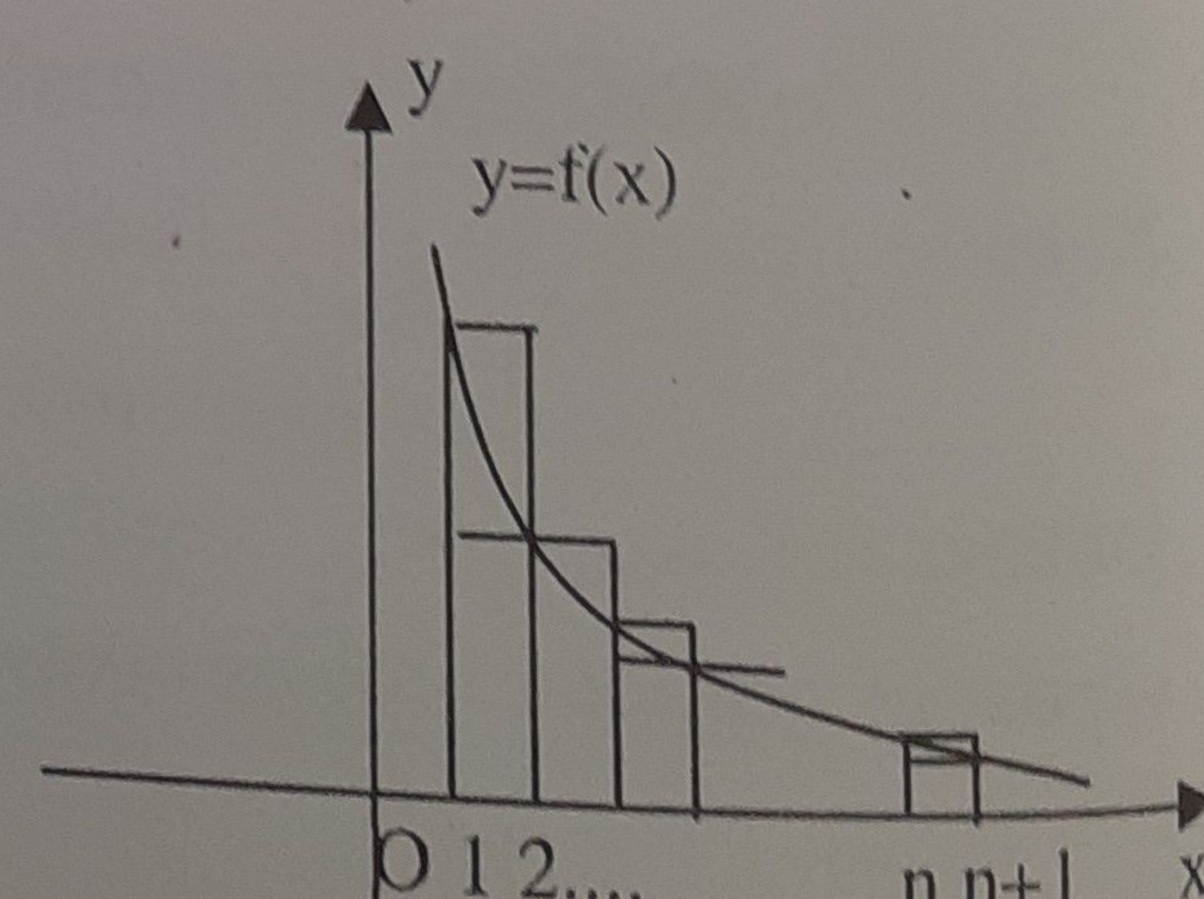
a) Kako je $\sqrt[n]{a_n} = \sqrt[n]{\left(\frac{n}{2n+1}\right)^n} = \frac{n}{2n+1}$ i $\limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} < 1$, to je dati red konvergentan.

b) Kako je $r = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \limsup_{n\to+\infty} \sqrt[n]{\frac{n}{a^n}} = \frac{1}{a}$, to dati red konvergira za $a>1$ i divergira za $0<a<1$. Za $a=1$ dati red divergira, jer se dobija red $\sum_{n=1}^{+\infty} n$ čiji niz parcijalnih suma divergira.

5. Košijev integralni kriterijum

Neka je $f(x)$ nenegativna i monotono opadajuća funkcija za $x \geq 1$. Neka je dalje $a_n = f(n)$, za $n=1,2,3,....$. Tada red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ i intergral $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ istovremeno konvergiraju, ili divergiraju.

Dokaz. Skicirajmo grafik funkcije $y=f(x)$ (sl. 1). Neka je $S_n = a_1 + a_2 + ... + a_n$. Uočimo jedan od krivolinijskih četvorouglova, na primjer, onaj koji je ograničen krivom $y=f(x)$, osom Ox i pravama $x=i$ i $x=i+1$. Uočimo da je $a_i \cdot 1$ površina pravougaonika sa visinom $a_i = f(i)$ i osnovicom 1. Kako je $a_{i+1} < \int_i^{i+1} f(x)dx < a_i$, $i=1,2,3...$, to je $S_n > \int_1^{n+1} f(x)dx$ i $S_{n+1} - a_1 < \int_1^{n+1} f(x)dx$, odnosno



Sl. 1

$S_{n+1} < \int_1^{n+1} f(x)dx + a_1$. Ako $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ konvergira (tj. ima konačnu vrijrdnost), tada je $S_n < S_{n+1} < \int_1^{+\infty} f(x)dx + a_1$. Kako je niz (S_n) monotono rastući i ograničen sa gornje strane, to je niz (S_n) konvergentan, tj. red (A) konvergira. Ako $\int_1^{+\infty} f(x)dx$ divergira, tada je $\lim\limits_{n\to+\infty} S_n > \lim\limits_{n\to+\infty} \int_1^{n+1} f(x)dx = +\infty$. Slijedi, niz (S_n) divergira, tj. red (A) divergira.

Primjer 11. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Za $\alpha \le 0$ red divergira, jer nije ispunjen neophodan uslov konvergencije reda. Razmotrimo slučaj $\alpha > 0$. Tada funkcija $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$ zadovoljava sve uslove Košijevog integralnog kriterijuma. Slijedi, dovoljno je ispitati konvergenciju (divergenciju) integrala $\int_1^{+\infty} \frac{dx}{x^\alpha}$. Kako je $\int_1^{N} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{\alpha-1}(N^{1-\alpha}-1), \ za\ \alpha \ne 1 \\ \ln N, \text{ za } \alpha=1 \end{cases}$, to je

$\lim\limits_{N\to+\infty} \int_1^{N} \frac{dx}{x^\alpha} = \begin{cases} \frac{1}{1-\alpha}, \ za\ \alpha > 1 \\ +\infty, \text{ za } 0 < \alpha \le 1 \end{cases}$, tj. dati red konvergira za $\alpha > 1$, i divergira za $\alpha \le 1$.

Postoji još niz značajnih kriterijuma za konvergenciju brojnih redova, na primjer: Rabeov, Gausov i Bertranov, o kojima ovdje nećemo pisati.

Na kraju razmotrimo redove čiji članovi imaju naizmjenične znakove (znakopromjenljivi redovi). Radi se o redovima koji imaju oblik

$$a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + a_5 - a_6 + \dots,$$

ili kratko

$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n a_n, \tag{9}$$

gdje su svi $a_n > 0$.

Pitanje konvergencije reda (9) rješava

6. Lajbnicov kriterijum

Ako je $a_1 > a_2 > a_3 > a_4 > \dots > a_{n-1} > a_n > \dots > 0$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$, tada red (9) konvergira.

Dokaz ove teoreme se oslanja na svojstvo ograničenih i monotonih nizova. Neka je $n = 2m$ i S_{2m} suma prvih $2m$ članova reda (9). Tada je

$$S_{2m} = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2m-1} - a_{2m},$$

odnosno

$$S_{2m} = a_1 - (a_2 - a_3) - (a_4 - a_5) - \dots - (a_{2m-2} - a_{2m-1}) - a_{2m} < a_1.$$

Niz $\langle S_{2m}\rangle$ je konvergentan, jer je niz $\langle S_{2m}\rangle$ monotono rastući i ograničen sa gornje strane. Slijedi, $\exists S \in R: \lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m} = S$. Dalje je $S_{2m+1} = S_{2m} + a_{2m+1}$ i $\lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m+1} = \lim\limits_{m\to+\infty} S_{2m} + \lim\limits_{m\to+\infty} a_{2m+1} = S + 0 = S$. Dakle, nizovi $\langle S_{2m}\rangle$ i $\langle S_{2m+1}\rangle$ konvergiraju, pa i sam niz $\langle S_m\rangle$ konvergira.

Primjer 12. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}$.

Neka je $a_n = \frac{1}{n}$. Kako je $1 > \frac{1}{2} > \frac{1}{3} > \dots > 0$ i $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{1}{n} = 0$, to saglasno Lajbnicovom kriterijumu, dati red konvergira. Kako red $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \left|\frac{(-1)^{n-1}}{n}\right| = \sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ divergira, to dati red uslovno konvergira.

Primjer 13. Ispitati konvergenciju reda $\sum\limits_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^{\alpha}}$.

Slučaj $\alpha = 1$ smo razmatrali u prethodnom primjeru. Neka je $a_n = \frac{1}{n^{\alpha}}$. Primjenom Lajbnicovog kriterijuma, dati red konvergira za svako $\alpha > 0$, i divergira za $\alpha \le 0$. Slijedi, dati red uslovno konvergira za $0 < \alpha \le 1$, i apsolutno konvergira za $\alpha > 1$.

2. 2. FUNKCIONALNI REDOVI

a) Ravnomjerna konvergencija redova

Uvedimo pojam funkcionalnog reda.

Definicija 1. Izraz oblika

$$a_1(x)+a_2(x)+\ldots+a_n(x)+\ldots, \qquad (1)$$

nazivamo funkcionalni red, pri čemu funkciju $a_n(x)$ nazivamo opšti član reda.

Red (1) zapisujemo kratko

$$\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x).$$

Za red (1) kažemo da konvergira u tački x_0 ako brojni red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x_0)$ konvergira. Za red (1) kažemo da konvergira na intervalu *I* ako konvergira u svakoj tački intervala *I*. Red (1) koji nije konvergentan ni u jednoj tački nazivamo divergentnim.

Uočimo da je niz parcijalnih suma $\langle S_n(x)\rangle, S_n(x)=\sum_{i=1}^{n} a_i(x)$, funkcionalni niz. Iz ovoga razloga potrebni su nam pojmovi konvergencije i ravnomjerne konvergencije funkcionalnih nizova.

Definicija 2. Za funkcionalni niz $\langle f_n(x)\rangle$ kažemo da konvergira na intervalu *I* ka funkciji $f(x)$, ako

$$(\forall x_0\in I)(\forall\varepsilon>0)(\exists n(x_0,\varepsilon)\in N)(\forall n>n(x_0,\varepsilon)):|f_n(x_0)-f(x_0)|<\varepsilon.$$

U prethodnoj definiciji prirodni broj $n(x_0,\varepsilon)$ zavisi od tačke x_0 i ε. Može li se izabrati $\varepsilon>0$ i $n(\varepsilon)$ takvo da je $|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon$ za svako $n>n(\varepsilon)$ i svako $x\in I$? Potvrdan odgovor dovodi do pojma ravnomjerne konvrgencije funkcionalnog niza.

Definicija 3. Za funkcionalni niz $\langle f_n(x)\rangle$ kažemo da ravnomjerno konvergira na intervalu *I* ka funkciji $f(x)$, ako

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n(\varepsilon)\in N)(\forall x\in I)(\forall n>n(\varepsilon)):|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon.$$

Ako niz $\langle f_n(x)\rangle$ ravnomjerno konvergira ka funkciji $f(x)$ na intervalu I, tada to kratko zapisujemo $f_n(x) \rightrightarrows f(x)$, $x\in I$. "Običnu" konvergenciju, kao i do sada, označimo $f_n(x)\to f(x)$, $x\in I$. Očigledno, iz ravnomjerne konvergencije slijedi (obična) konvergencija, dok obrnuto nije tačno, što pokazuje sljedeći primjer.

Primjer 1. Ispitati da li niz x^n, $n=1,2,3....$ ravnomjerno konvergira na intervalu:
a) $[0,q]$, $q<1$, b) $[0,1]$.

a) Očigledno, $x^n\to 0$, $x\in[0,q]$, $q<1$. Dalje je $\left|x^n-0\right|\le q^n$, pa

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n(\varepsilon)=\left[\log_q\varepsilon\right]\in N)(\forall x\in[0,q])(\forall n>n(\varepsilon)):\left|x^n-0\right|<\varepsilon,$$

tj. $x^n \rightrightarrows 0$, $x\in[0,q]$, $q<1$.

b) U ovome slučaju $x^n\to f(x)=\begin{cases}0, & x<1\\ 1, & x=1\end{cases}$. Dokažimo da dati niz ne konvergira ravnomjerno ka funkciji $f(x)$ na odsječku $[0,1]$. Pretpostavimo suprotno, tj. da se radi o ravnomjernoj konvergenciji. Izaberimo $\varepsilon>0$, takvo da je, na primjer, $\varepsilon<\frac{1}{2}$. Za ovako izabrano ε nađimo $n(\varepsilon)$ tako da je $\left|x^n-f(x)\right|<\varepsilon$ za svako $x\in[0,1]$ i svako $n>n(\varepsilon)$. Fiksirajmo n. Specijalno, poslednja nejednakost važi i za $x_0=\sqrt[n]{2\varepsilon}$, jer je za $\varepsilon<\frac{1}{2}$: $\sqrt[n]{2\varepsilon}<1$, pa $x_0\in[0,1]$. Slijedi, $\left|x_0^n-f(x_0)\right|<\varepsilon$, što je nemoguće, jer je $x_0\neq 1$ pa imamo $\left|x_0^n-f(x_0)\right|=\left|x_0^n\right|=\left|2\varepsilon\right|=2\varepsilon>\varepsilon$. Dobijena protivrječnost dokazuje da niz x^n ne konvergira ravnomjerno na odsječku $[0,1]$.

Primjer 2. Dokazati da $\frac{1}{x^2+n}\rightrightarrows 0$, $x\in R$.

Neka je $f_n(x)=\frac{1}{x^2+n}$, $x\in R$. Kako $f_n(x)\to 0$ i za $0<f_n(x)\le\frac{1}{n}$, $x\in R$, to

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n(\varepsilon)=[\varepsilon]\in N)(\forall x\in R)(\forall n>n(\varepsilon)):\left|f_n(x)-0\right|<\varepsilon,$$

tj. $\frac{1}{x^2+n}\rightrightarrows 0$, $x\in R$.

O ravnomjernoj konvergenciji funkcionalnih nizova postoji više kriterijuma, ovdje navodimo samo jedan:

$$\left(f_n(x)\rightrightarrows f(x),\ x\in I\right)\Leftrightarrow\left(\lim_{n\to+\infty}\sup_{x\in I} r_n\right)=0,$$

gdje je $r_n(x)=\left|f_n(x)-f(x)\right|$.

Definicija 4. Za funkcionalni red (1) kažemo da ravnomjerno konvergira ka svojoj sumi $S(x)$ na intervalu *I*, ako njegov niz parcijalnih suma $\langle S_n(x)\rangle$ ravnomjerno konvergira ka funkciji $S(x)$ na intervalu *I*.

Na osnovu navedenih kriterijuma o ravnomjernoj konvergenciji funkcionalnih nizova mogu se dokazati sljedeći kriterijumi o ravnomjernoj konvergenciji funkcionalnih redova.

1. Košijev kriterijum

(Red (1) ravnomjerno konvergira na intervalu *I*) $\Leftrightarrow$

$$(\forall\varepsilon>0)(\exists n(\varepsilon)\in N)(\forall n>n(\varepsilon))(\forall x\in I)(\forall p\in N):\left|S_{n+p}(x)-S_n(x)\right|<\varepsilon$$

.

2. Vajerštrasov kriterijum

Neka je $\sum_{n=1}^{+\infty}c_n$ konvergentan brojni red i $c_n>0$ za svako $n\in N$. Tada

$\big((\forall x\in I)(\forall n\geq n_0\geq 1):\left|a_n(x)\right|\leq c_n\big)\Rightarrow$(red (1) ravnomjerno konvergira na intervalu *I*).

Primjer 2. Ispitati konvergenciju redova:

$$\text{a) } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos nx}{n^{\alpha}},\ \alpha>1,\ \text{ b) } \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx}{1+n^5x^2}.$$

a) Kako je $(\forall x\in R)(\forall n\in N):\left|\frac{\cos nx}{n^{\alpha}}\right|\leq\frac{1}{n^{\alpha}}$ i red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\alpha}}$ konvergira, to saglasno Vajerštrasovom kriterijumu, dati red ravnomjerno konvergira na skupu *R*.

b) Nađimo najveću vrijednost funkcije $\varphi(x)=\frac{nx}{1+n^5x^2}$: $\varphi'(x)=\frac{-n^6x^2+n}{\left(1+n^5x^2\right)^2}=0$ za $x_0=n^{\frac{5}{2}}$, $\varphi_{\max}(x_0)=\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. Slijedi, $(\forall x\in R)(\forall n\in N):\left|\frac{nx}{1+n^5x^2}\right|\leq\frac{1}{2n^{\frac{3}{2}}}$. Kako red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n^{\frac{3}{2}}}$ konvergira, to će red $\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx}{1+n^5x}$ ravnomjerno konvergirati na *R*.

Navodimo osnovna svojstva ravnomjerno konvergentnih redova:

Svojstvo 1. Ako su funkcije $a_n\in C(I)$ i red $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x)$ ravnomjerno konvergira ka funkciji $S(x)$ na intervalu *I*, tada je $S\in C(I)$.

Svojstvo 2. Ako su funkcije a_n integrabilne na odsječku $[a,b]$ i red $\sum_{n=1}^{+\infty}a_n(x)$ ravnomjerno konvergira ka funkciji $S(x)$ na intervalu $[a,b]$, tada je

$$\int_a^b \left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) \right) dx = \sum_{n=1}^{+\infty} \int_a^b a_n(x) dx .$$

Svojstvo 3. Neka su funkcije a_n realne, neprekidne i imaju neprekidne izvode prvog reda na intervalu I ($n = 1, 2, 3 \ldots$). Ako je red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x)$ konvergentan na I, a red $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(x)$ ravnomjerno konvergentan na I, tada je

$$\left(\sum_{n=1}^{+\infty} a_n(x) \right)' = \sum_{n=1}^{+\infty} a_n'(x) .$$